

Continua la pubblicazione integrale di parti del "GEAR MOTOR HANDBOOK" Parte III: Gli Ingranaggi

Jaques Sprengers Presidente ISO/TC 60

La presenza di tale interferenza può essere verificata con il seguente calcolo:

$$\Delta_1 = \arccos \left[\frac{a}{d_{a1}} \left(\frac{d_{a2}^2 - d_{a1}^2}{4a^2} - 1 \right) \right] \quad (3.077)$$

$$\Delta_2 = \arccos \left[\frac{a}{d_{a2}} \left(\frac{d_{a2}^2 - d_{a1}^2}{4a^2} + 1 \right) \right] \quad (3.078)$$

$$\Psi_1 = \text{inv } \alpha_{a1} - \text{inv } \alpha_{wr} + \Delta_1 \quad (3.079)$$

$$\Psi_2 = \text{inv } \alpha_{a2} - \text{inv } \alpha_{wr} + \Delta_2 \quad (3.080)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (d_{b1} \Psi_1 + d_{b2} \Psi_2) \quad (3.081)$$

Non c'è interferenza se:

$$\Delta > 0 \quad (3.082)$$

Il valore di questa funzione varia in modo sensibile anche per piccole variazioni dell'interasse. Occorrerà quindi controllare i valori estremi che l'interasse può assumere tenendo conto delle tolleranze (vedi paragrafo "Precisione degli ingranaggi").

Gioco di Testa del Dente. Durante il funzionamento il gioco lasciato tra la testa del dente di una ruota e il fondo del dente della ruota coniugata non deve essere nullo per ragioni di sicurezza di funzionamento e di lubrificazione. Il gioco di testa del dente viene espresso dalla seguente formula:

$$c_{1,2} = a - \frac{1}{2} (d_{a2,1} - d_{f1,2}) \quad (3.083)$$

Si ribadisce l'importanza del ribassamento del dente per garantire il corretto funzionamento.

3.4.3 Strisciamento

Teoria. Velocità di Rotolamento e di Strisciamento. Sul piano trasversale si consideri un punto M della linea di contatto. Tale punto è comune al pignone ed alla ruota e durante il movimento si sposta lungo la linea di contatto (o di azione); le due ruote continuano a rimanere in contatto. Il punto considerato ruota intorno al centro O_1 in quanto appartenente al pignone e intorno al centro O_2 in quanto appartenente alla ruota. Sia che il punto appartenga alla ruota od al pignone, si sposterà lungo la linea di contatto alla stessa velocità (vedi Fig. 3.8).

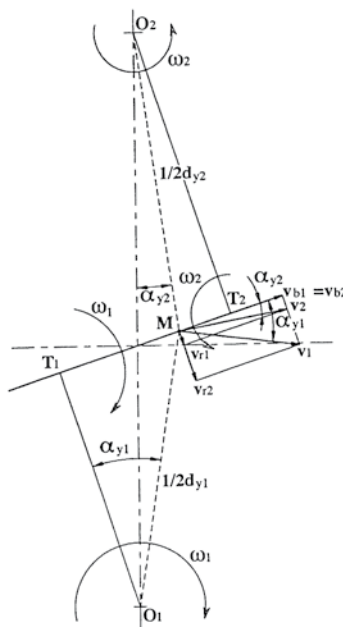


Fig. 3.8. Teoria dello strisciamento

Se n_1 è la velocità di rotazione del pignone e n_2 quella della ruota, la velocità primitiva tangenziale ($n_2 = n_1 u$) sarà:

$$v = \pi \frac{n_1 d_{w1}}{60000} = \pi \frac{n_2 d_{w2}}{60000} \quad (3.084)$$

Se il valore della velocità angolare di rotazione

del pignone è ω_1 , il valore della velocità tangenziale intorno a O_1 sarà: $v_1 = 0,0005 d_{y1} \omega_1$, perpendicolare a O_1M . Altrettanto dicasi per la velocità tangenziale intorno a O_2 che sarà: $v_2 = 0,0005 d_{y2} \omega_2$, perpendicolare a O_2M .

Proiettiamo ora queste velocità sulla linea di contatto e su una ad essa perpendicolare. Si avrà:

$$\begin{aligned} v_{r1} &= v_1 \sin \alpha_{y1} = 0,0005 d_{y1} \omega_1 \sin \alpha_{y1} \\ v_{r2} &= v_2 \sin \alpha_{y2} = 0,0005 d_{y2} \omega_2 \sin \alpha_{y2} \\ v_{b1} &= v_1 \cos \alpha_{y1} = 0,0005 d_{y1} \omega_1 \cos \alpha_{y1} \\ v_{b2} &= v_2 \cos \alpha_{y2} = 0,0005 d_{y2} \omega_2 \cos \alpha_{y2} \end{aligned}$$

dato che

$$d_{y1} \cos \alpha_{y1} = d_{b1}$$

e

$$d_{y2} \cos \alpha_{y2} = d_{b2}$$

In base alla definizione di ingranaggio si può anche scrivere che:

$$v_{b1} = v_{b2}$$

Ne consegue che:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_{b2}}{d_{b1}} = \frac{z_2}{z_1} \quad (3.085)$$

D'altra parte si ottiene:

$$0,5 d_{y1} \sin \alpha_{y1} = T_1 M = \rho_{M1} \quad (3.086)$$

e

$$0,5 d_{y2} \sin \alpha_{y2} = T_2 M = \rho_{M2} \quad (3.087)$$

e anche

$$v_{r1} = \rho_{M1} \omega_1 / 1000 \quad (3.088)$$

e

$$v_{r2} = \rho_{M2} \omega_2 / 1000 \quad (3.089)$$

Si noti che l'ingranamento istantaneo è dato dalla velocità di spostamento sulla linea di contatto e dalla velocità tangenziale per ciascun dente rispettivamente intorno ai punti T_1 e T_2 e vengono chiamate velocità di rotolamento. Queste due velocità di rotazione hanno la me-

Full publication continues of our "GEAR MOTOR HANDBOOK" Part III: Mechanical Gears

Through the following calculations it is possible to determine the existence of such an interference.

$$\Delta_1 = \arccos \left[\frac{a}{d_{a1}} \left(\frac{d_{a2}^2 - d_{a1}^2}{4a^2} - 1 \right) \right] \quad (3.077)$$

$$\Delta_2 = \arccos \left[\frac{a}{d_{a2}} \left(\frac{d_{a2}^2 - d_{a1}^2}{4a^2} + 1 \right) \right] \quad (3.078)$$

$$\Psi_1 = \text{inv } \alpha_{a1} - \text{inv } \alpha_w + \Delta_1 \quad (3.079)$$

$$\Psi_2 = \text{inv } \alpha_{a2} - \text{inv } \alpha_w + \Delta_2 \quad (3.080)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (d_{b1} \Psi_1 + d_{b2} \Psi_2) \quad (3.081)$$

There is no interference if:
 $\Delta > 0$.
 (3.082)

The value of such a function varies with the centre distance value. When required, it is necessary to check the maximum and the minimum values taken by the centre distance with regard to tolerances (see paragraph on "Gear precision").

Tip and root clearance. During operation the clearance left between the tip of a tooth belonging to a wheel and the root of the tooth belonging to the mating gear must not be null. Failing this working reliability and lubrication are not assured.

The tip and root clearance is expressed by the following formula:

$$c_{1,2} = a - \frac{1}{2} (d_{a2,1} - d_{f1,2}) \quad (3.083)$$

We notice the importance of the role played by tooth shortening in order to assure the correct working of the whole unit.

3.4.3 Sliding

Theory. Rolling speed and Sliding speed. On the transverse plane we consider a point M belonging to the line of action. Such a point is common to the pinion and to the wheels but during movement it moves on the line of action; the two wheels continue to be in contact. This point also turns around the centre O_1 as it belongs to the pinion and around the centre O_2 as it belongs to the wheel. Whether this point belongs to the wheel or to the pinion, it moves at the same speed on the line of action (see

Fig. 3.8 for the expression of such speed).
 If n_1 is the rotation speed of the pinion and n_2 the rotation speed of the wheel, the basic rotation speed of the wheel ($n_2 = n_1 u$) will be:

$$v = \pi \frac{n_1 d_{w1}}{60000} = \pi \frac{n_2 d_{w2}}{60000} \quad (3.084)$$

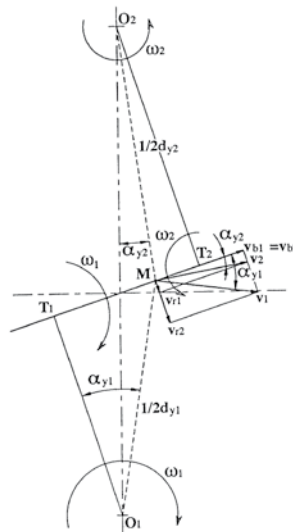


Fig. 3.8 Sliding theory
 If the value of the rotation angular speed of the pinion is ω_1 the value of the rotation speed around O_1 will be: $v_1 = 0.0005 d_{y1} \omega_1$ which is perpendicular to O_1M . The tangential speed around O_2 will be: $v_2 = 0.0005 d_{y2} \omega_2$ which is perpendicular to O_2M .

Let us project such speed on a action line and on a line perpendicular to it. The following formula will result from such a projection:

$$\begin{aligned} v_{r1} &= v_1 \sin \alpha_{y1} = 0,0005 d_{y1} \omega_1 \sin \alpha_{y1} \\ v_{r2} &= v_2 \sin \alpha_{y2} = 0,0005 d_{y2} \omega_2 \sin \alpha_{y2} \\ v_{b1} &= v_1 \cos \alpha_{y1} = 0,0005 d_{y1} \omega_1 \cos \alpha_{y1} \\ v_{b2} &= v_2 \cos \alpha_{y2} = 0,0005 d_{y2} \omega_2 \cos \alpha_{y2} \end{aligned}$$

as
 $d_{y1} \cos \alpha_{y1} = d_{b1}$
 and
 $d_{y2} \cos \alpha_{y2} = d_{b2}$

on the basis of the gear definition, we can also write that:

$$v_{b1} = v_{b2} \quad (3.085)$$

It results that:
 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_{b2}}{d_{b1}} = \frac{z_2}{z_1}$

On the other hand, we get:
 $0.5 d_{y1} \sin \alpha_{y1} = T_1 M = \rho_{M1}$ (3.086) and



$$0.5 d_{y2} \sin \alpha_{y2} = T_2 M = \rho_{M2} \quad (3.087)$$

and also
 $v_{r1} = \rho_{M1} \omega_1 / 1000$
 (3.088)

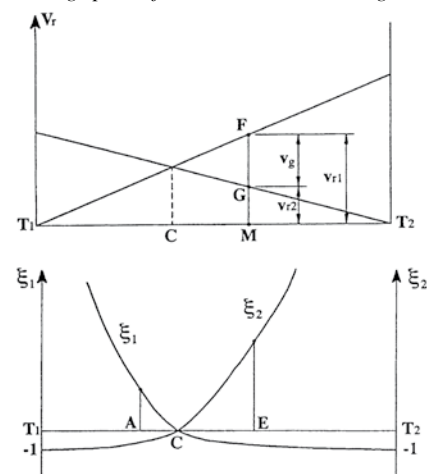
and
 $v_{r2} = \rho_{M2} \omega_2 / 1000$
 (3.089)

We notice that the instantaneous meshing is formed by a speed of displacement on the line of action and a rotation tangential speed on each tooth around the point T_1 et T_2 respectively. These two different rotation speeds have the same direction, which is perpendicular to the line of action, but they are different.

A rotating speed exists on each point of contact. It is given by:

$$v_R = |v_{r1} - v_{r2}| \quad (3.090)$$

Figure 3.9 shows the trend of the rolling and sliding speeds for the external tooththing.





desima direzione, perpendicolare alla linea di contatto, ma sono diverse.

Ciascun punto di contatto ha una velocità di strisciamento data da:

$$v_x = |v_{r1} - v_{r2}| \quad (3.090)$$

La Fig. 3.9 mostra l'andamento della velocità di rotolamento e strisciamento riferito alla dentatura esterna lungo la linea di azione.

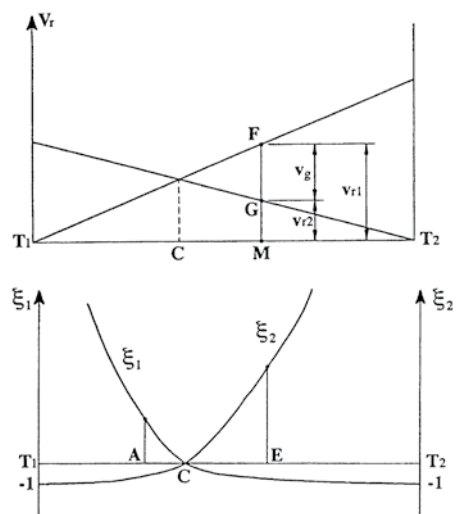


Fig. 3.9. Velocità di rotolamento e strisciamento. Strisciamento esterno specifico

La Fig. 3.10 mostra le stesse velocità riferite alla dentatura interna. Si noti che sul segmento di accesso, la ruota condotta striscia sulla conduttrice e che sul segmento di recesso, la ruota conduttrice striscia sulla ruota condotta. Nel punto primitivo di funzionamento lo strisciamento è nullo, le due velocità di rotolamento sono uguali. Il funzionamento di un ingranaggio avviene quindi con rotolamento e strisciamento dei denti coniugati.

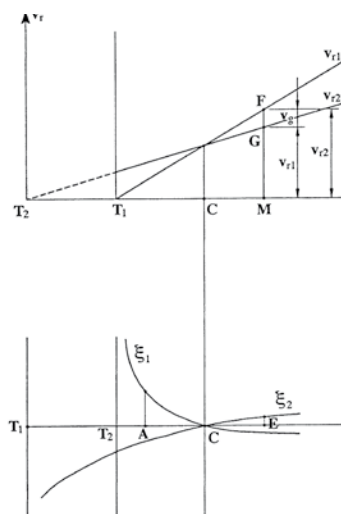


Fig. 3.10. Velocità di rotolamento e strisciamento riferite alla dentatura interna

Nel grafico delle velocità ad un punto qualunque M corrispondono un valore di rotolamento MG e uno di strisciamento GF. Lo strisciamento provoca usura e surriscaldamento, ossia perdita di energia, e pertanto il valore del rendimento degli ingranaggi è inferiore all'unità.

Strisciamento Specifico. Per capire l'importanza dello strisciamento è preferibile considerare il rapporto tra velocità di strisciamento e velocità di rotolamento in ciascun punto di contatto. Questo rapporto viene chiamato strisciamento specifico. Esso è positivo per una ruota quando quella coniugata "le striscia sopra" ossia quando la ruota "subisce" lo strisciamento; è negativo quando lo strisciamento è provocato dal dente.

Si avrà quindi:

$$\xi_1 = \frac{\omega_2 \rho_{M2} - \omega_1 \rho_{M1}}{\omega_1 \rho_{M1}} \quad (3.091)$$

$$\xi_2 = \frac{\omega_1 \rho_{M1} - \omega_2 \rho_{M2}}{\omega_2 \rho_{M2}} \quad (3.092)$$

o anche

$$\xi_1 = \frac{\omega_2 \rho_{M2}}{\omega_1 \rho_{M1}} - 1 = \frac{z_1 \rho_{M2}}{z_2 \rho_{M1}} - 1 \quad (3.093)$$

e

$$\xi_2 = \frac{\omega_1 \rho_{M1}}{\omega_2 \rho_{M2}} - 1 = \frac{z_2 \rho_{M1}}{z_1 \rho_{M2}} - 1 \quad (3.094)$$

o

$$\xi_1 = \frac{\tan \alpha_{y2}}{\tan \alpha_{y1}} - 1 \quad (3.095)$$

o

$$\xi_2 = \frac{\tan \alpha_{y1}}{\tan \alpha_{y2}} - 1 \quad (3.096)$$

La Fig. 3.10 mostra i grafici degli strisciamenti specifici tra i due denti coniugati in un punto di contatto che si sposta tra i due punti di tangenza con i cerchi base.

Se sulla linea di contatto si individuano i punti A ed E, di inizio e fine ingranamento, si nota che all'inizio il valore dello strisciamento specifico raggiunge il massimo sulla ruota conduttrice, mentre alla fine tale valore raggiunge il massimo sulla ruota condotta. Uno strisciamento specifico troppo elevato provoca usura che sarà particolarmente concentrata sul fondo del dente. Tutti gli accorgimenti tendenti a ridurre lo strisciamento specifico miglioreranno la resistenza all'usura del dente.

Nel paragrafo "Spostamenti della dentatura" si studieranno dei metodi per ridurre tale effetto.

3.4.4 Forze

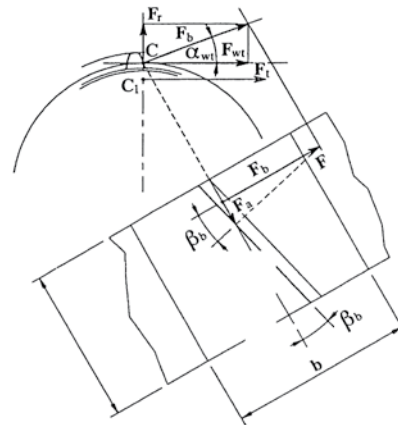
Se si applica una coppia T1 all'asse della ruota conduttrice, si creerà una forza F tra i denti coniugati. Tale forza risulta nel piano base perpendicolare alla retta generatrice in quanto tale direzione è la normale comune alle due superfici di contatto. Questa forza rappresenta un'azione sulla ruota condotta ed una reazione su quella conduttrice. Sul piano base è possibile scomporre questa forza in una forza F_b, giacente sul piano trasversale, ed una forza F_a parallela all'asse e quindi assiale.

La forza F_a è data da:

$$F_a = F \sin \beta_b \quad (3.097)$$

e per la forza F_b si ha:

$$F_b = F \cos \beta_b \quad (3.098)$$



Piano di base proiettato

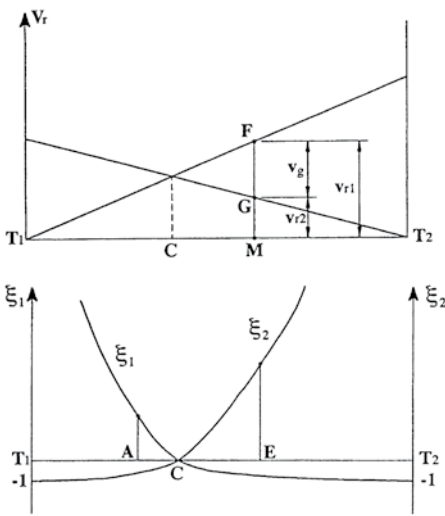


Fig. 3.9 Rolling and sliding speed. External specific sliding

Figure 3.10 provides the same speed for internal toothing.

We notice that on the approach path the driven gear wheel slides on the driving gear and that the driving gear slides on the driven gear wheel on the recess path. On the pitch point the sliding value is null as the two rotation tangential speeds are equal.

A gear can work due to the fact that mating teeth slide and roll.

On the graph representing speeds at a point M the rolling value is MG while the sliding value is GF. Sliding causes wear and overheating, i.e. energy loss. Therefore the value of the gear efficiency is lower than the unit.

Specific Sliding. In order to define the importance of sliding it is preferable to consider the relation of the sliding speed to the rolling speed at each point of contact. This relation is called specific sliding. It is positive on one wheel when the mating gear wheel slides on the other or when the wheel undergoes sliding. It is negative when sliding is caused by the considered tooth.

Then:

$$\xi_1 = \frac{\omega_2 \rho_{M2} - \omega_1 \rho_{M1}}{\omega_1 \rho_{M1}} \quad (3.091)$$

T2 T1 C M

T1 T2 _

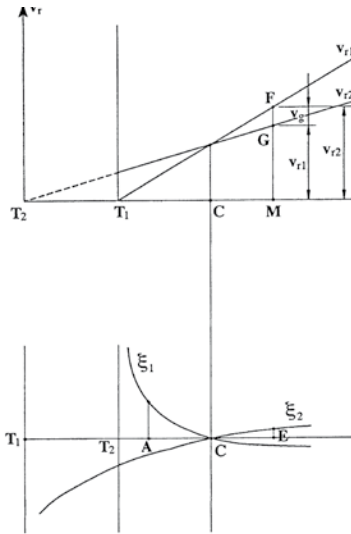


Fig. 3.10 Rolling and sliding speed for internal toothing and

$$\xi_2 = \frac{\omega_1 \rho_{M1} - \omega_2 \rho_{M2}}{\omega_2 \rho_{M2}} \quad (3.092) \text{ or even}$$

(3.092) or even

$$\xi_2 = \frac{\omega_1 \rho_{M1}}{\omega_2 \rho_{M2}} - 1 = \frac{z_2 \rho_{M1}}{z_1 \rho_{M2}} - 1 \quad (3.093) \text{ and}$$

(3.093) and

$$\xi_2 = \frac{\omega_1 \rho_{M1}}{\omega_2 \rho_{M2}} - 1 = \frac{z_2 \rho_{M1}}{z_1 \rho_{M2}} - 1 \quad (3.094) \text{ or}$$

(3.094) or

$$\xi_1 = \frac{\tan \alpha_{y2}}{\tan \alpha_{y1}} - 1 \quad (3.095)$$

(3.095)

$$\xi_2 = \frac{\tan \alpha_{y1}}{\tan \alpha_{y2}} - 1 \quad (3.096)$$

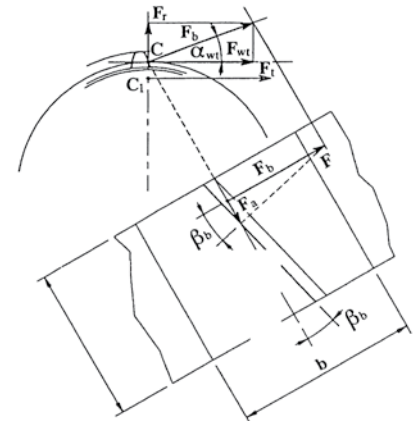
(3.096)

Figure 3.10 shows the graphs concerning the specific sliding between mating teeth at a point of contact that moves between the two tangent points on the base circles.

If we set points A and E on the line of action representing the beginning and the end of meshing, we notice that at the beginning of meshing the value of the specific sliding reaches the top on the driving gear wheel. When it ends its value reaches the top on the driven gear wheel. Specific sliding causes wear that concentrates particularly on the root of the tooth. All the precautions taken to reduce the value of specific sliding turn out to have strengthened the tooth resistance to wear.

In the paragraph "rack shift factor" we will deal with the methods aimed at reducing such values.

3.4.4 Forces



Projected base plane

Fig. 3.11 Forces

If a torque T_1 is applied to the axis of the driving gear wheel, a force F will be generated between the mating teeth. Such force is positioned on the base plane perpendicular to the generatrix line as such direction is perpendicular to the two surfaces of contact. This force is an action on the driven gear wheel and a reaction on the driving gear wheel. On the base plane it is possible to divide such a force into a force F_b which is positioned on the transverse plane and into another force F_a an axial force, which is parallel to the axis. The force F_a is given by:

$$F_a = F \sin \beta_b$$

(3.097) while for force F_h we have:

$$F_b = F \cos \beta_b$$

(3.098)